Novecento Novecenti.
La cultura di un secolo

1 - Introduzione

È noto che la durata del secolo XX è stata segnata da due avvenimenti tragici come le due guerre mondiali. In particolare la seconda ha marcato, con buona approssimazione il passaggio tra la prima e la seconda metà del secolo. È anche facile osservare che la scienza, soprattutto quella della nostra civilizzazione, non ci appare più astratta dalla realtà materiale e, per così dire, disinteressata, ma è strettamente collegata con la vita civile e spesso anche con la produzione dei beni materiali; in altre parole, la scienza ci appare, in modo più o meno accentuato, legata alla tecnica. La conseguenza di ciò potrebbe essere espressa dicendo che anche le vicende della politica sono in modo più o meno stretto collegate con la ricerca scientifica; e la gerarchia tra le Nazioni segue abbastanza da vicino lo sviluppo della ricerca scientifica che si svolge in esse.

Si potrebbe dire che anche l'evoluzione della matematica risente di questi fenomeni politici, per quanto in modo attenuato, ed in modo spesso quasi inavvertibile; e ciò andrebbe contro la opinione abbastanza diffusa secondo la quale la matematica viene presentata come una scienza astratta, e molto distaccata dalla realtà del mondo materiale e politico.

Quale che sia la validità di queste osservazioni, sulle quali non intendiamo insistere, possiamo accettarle almeno come ipotesi di lavoro, per facilitare la scansione del tempo che ci riguarda, nel secolo che sta per finire.

In modo molto rudimentale ed approssimato si potrebbe dire che la matematica della prima metà del nostro secolo era in qualche misura erede del quadro scientifico trasmesso a noi dal secolo precedente; ciò si potrebbe leggere anche nella classificazione di quelli che all'epoca erano considerati come i rami principali della dottrina: rami che erano classicamente e tradizionalmente elencati, e sono, grosso modo, riconoscibili nei titoli dei corsi universitari: Analisi matematica, Geometria e Meccanica razionale, aggregata spesso alla fisica matematica.

Anche noi ci serviremo, almeno in modo provvisorio e con atteggiamento relativamente libero, di questo quadro di riferimento, soprattutto per quanto riguarda la prima metà del secolo: infatti l'evoluzione di tale quadro è stata relativamente graduale e lenta nel periodo precedente la seconda guerra mondiale; è stata invece molto più rapida e quasi tumultuosa nella seconda metà del secolo.

2 - L'inizio del secolo

Per quanto riguarda la matematica, si potrebbe dire che l'avvenimento iniziale del secolo è rappresentato dal congresso mondiale dei matematici, avvenuto a Parigi nel 1900. Il Congresso viene frequentemente ricordato perché, in esso David Hilbert [1862-1943] pronunciò una conferenza in cui enunciava certi problemi insoluti della matematica del tempo; veniva così fatto il punto sullo stato della dottrina e venivano indicati ai ricercatori i campi di ricerca ritenuti più importanti e gravidi di conseguenze.

Insieme alla conferenza pronunciata di Hilbert merita forse qualche ricordo anche quella pronunciata da Henri Poincaré, [1854-1912], nella quale il fisico e matematico francese faceva una acuta e perspicace analisi delle mentalità dei matematici e delle circostanze psicologiche della ricerca e dell'invenzione matematica. Ricordiamo infine che in occasione di quel congresso avvenne l'incontro tra il filosofo Bertrand Russell [1872-1970] ed il matematico italiano Giuseppe Peano [1858-1932]; incontro che indusse il filosofo inglese a dedicarsi alle note ricerche sui fondamenti della matematica.

Un'altra realizzazione del primo quarto di secolo fu la prosecuzione della pubblicazione dei volumi della "Enzyklopedie der mathematischen Wissenschaften"; impresa che coinvolgeva prevalentemente matematici tedeschi e francesi, ma che si spense praticamente in occasione della prima guerra mondiale.

Va detto che un'altra impresa che mirava alla sintesi del pensiero matematico fu la compilazione del "Formulario mathematico" da parte di Peano e di studiosi appartenenti alla sua scuola. L'opera mirava a dare una presentazione della matematica in forma molto sintetica perché utilizzava prevalentemente le notazioni della logica simbolica formale, con il simbolismo inventato ed utilizzato metodicamente dal Peano; inoltre le parti non simbolizzate erano scritte in una specie di esperanto, un linguaggio che lo stesso Peano aveva chiamato "interlingua" o anche "latino sine flexione".

Tuttavia si direbbe che l'evoluzione del pensiero matematico sia così rapida che i progetti di opere di sintesi, che vogliano essere esaustive, riescono di problematica realizzazione.

3 - L'analisi matematica

L'evoluzione dell'analisi matematica, nel periodo precedente la seconda guerra mondiale, presenta vari ed importanti filoni di sviluppo. Un primo di tali filoni, guardato superficialmente, potrebbe essere giudicato come lo sviluppo del movimento di costruzione del rigore nel pensiero matematico. Movimento che trova le sue radici nei lavori del secolo precedente: tra i quali è d'obbligo ricordare i nomi di Augustin-Louis Cauchy [1789-1857], Georg Friedrich Bernhard Riemann [1826-66], Karl Theodor Wilhelm Weierstrass [1815-97].

È noto che, per opera di questi ricercatori, si realizzò una radicale evoluzione critica dell'analisi matematica. In forma approssimata, si potrebbe dire che i concetti radicalmente nuovi, creati da quelli che si potrebbero chiamare i "grandi fondatori" dei secoli XVII e XVIII, furono chiariti, e formulati rigorosamente; tra questi concetti vi sono quelli di limite, e di funzione continua. Questi sono stati in un primo tempo accettati come forniti e fondati da quella che viene abitualmente chiamata "intuizione", e che sarebbe forse meglio indicata come "immaginazione"; essi furono precisati e definiti rigorosamente. In particolare si deve a Cauchy anche la creazione della teoria delle funzioni di variabile complessa; una teoria questa che si doveva sviluppare meravigliosamente in seguito, sfociando nella teoria delle funzioni analitiche; e doveva fornire alla tecnica ed alla scienza applicata molti strumenti concettuali e formali.

In questo ordine di idee è interessante osservare l'importanza della problematica geometrica come stimolo alla creazione di concetti e di strutture matematiche. È da ricordarsi che l'analisi del continuo geometrico e del concetto [apparentemente intuitivo ed elementare] di dimensione era stata iniziata da Peano col celebre esempio della "curva" continua che riempie un intero quadrato. Esempio che può essere considerato come un caso, particolarmente clamoroso, di distacco da ciò che viene abitualmente considerato come un dato della pretesa "intuizione" geometrica.

L'analisi matematica ha proseguito in questa direzione il suo cammino; purtroppo non soltanto per il grande numero di risultati, ma anche - e diremmo soprattutto - per la necessità di impiegare un linguaggio tecnico forse un poco arduo, siamo costretti a parlare in modo molto generico dei passi principali che furono fatti in questo campo.

Uno dei concetti fondamentali dell' analisi matematica dei secoli precedenti il nostro era quello di "integrale" di una funzione. Tale concetto dà senso preciso a molti altri concetti attinenti alla geometria ed alla fisica; per esempio, in ciò che concerne la geometria, il concetto di integrale dà consistenza rigorosa ai concetti importantissimi di lunghezza di una curva, di area di una superficie, di volume di un solido; e tali concetti ammettono generalizzazioni anche in iperspazi di dimensioni superiori a tre. Per quanto attiene la fisica il concetto di integrale ha importanza fondamentale per la definizione di lavoro e di energia, concetti fondamentali che reggono la fisica e le sue applicazioni.

Il concetto di integrale, introdotto già dai fondatori dell'analisi matematica per la sua importanza, è stato rielaborato e reso completamente rigoroso da Riemann. Ma le nuove vedute sul continuo geometrico e la teoria degli insiemi hanno permesso di percorrere ulteriore strada nella direzione dell'approfondimento e della generalizzazione dei concetti già noti ed utilizzati. Tale progresso si è concretato soprattutto nell' elaborazione della teoria della misura degli insiemi di punti, e nella conseguente elaborazione del concetto di integrale. La strada verso queste nuove elaborazioni è stata aperta da Henri Lebesgue [1875-1941], e poi proseguita da vari matematici, tra i quali ricordiamo qui Frigyes Riesz [1880-1956].

Oltre alla importantissima estensione del concetto di integrale stava intanto maturando un'altra branca dell'analisi, che doveva dimostrarsi in seguito di grande importanza. Per dare una descrizione sommaria e rudimentale di questa dottrina, si potrebbe risalire agli studi di Leonhard Euler [1707-83; il nome è spesso latinizzato in "Eulero"] e da Joseph-Louis Lagrange [1736-1813]. Questi matematici ripresero in forma moderna e con i nuovi strumenti certi problemi che già erano stati affrontati dalla geometria classica, e che avevano condotto alla costruzione della dottrina detta degli "isoperimetri".

Le elaborazioni dei matematici che abbiamo nominato condussero a risolvere problemi in cui le incognite sono funzioni, appartenenti a determinate classi e soddisfacenti a determinate condizioni. Molti fra tali problemi sono nati da questioni riguardanti la meccanica razionale e la geometria. Per esempio, uno dei problemi classici in questo ordine di idee è quello che conduce a determinare la curva "geodetica" che congiunge due punti su una superficie o addirittura in un determinato spazio, cioè la curva tale che la sua lunghezza sia la minima possibile tra quelle di tutte le altre curve che pure congiungono gli stessi punti.

Abbiamo qui citato il problema della geodetica, perché, oltre alla sua importanza ed alla sua classica notorietà, il concetto di geodetica in uno spazio-tempo non euclideo fu utilizzato da Albert Einstein [1880-1955] come paradigma delle leggi fisiche legate ai fenomeni della gravitazione.

Problemi di questo tipo, e di altri analoghi o di livello più elevato, costituirono il germe di una branca del tutto nuova dell'analisi matematica, branca che ricevette il nome di "Calcolo delle variazioni". Tali problemi presentano difficoltà di livello superiore a quello dei problemi classici; la loro trattazione, insieme con quella di altri numerosi argomenti, rientra nel nuovo e fiorente ramo dell'analisi moderna che viene chiamata "Analisi funzionale".

4 - La geometria

Anche la storia della geometria nel nostro secolo è legata allo sviluppo di questa dottrina nel secolo XIX. Tale sviluppo è collegato con il cambiamento della stessa concezione dell'oggetto della geometria ed alla nascita di nuovi ed rigogliosi rami sul vecchio tronco della dottrina secolare. Si potrebbe osservare che il cambiamento della concezione della geometria è uno degli effetti della invenzione delle cosiddette geometrie-non, in particolare della geometria non euclidea.

Tale invenzione vanificava la vecchia concezione di un "oggetto" della geometria: infatti questo oggetto [quale che sia: lo "spazio" geometrico, oppure un altro ente, a seconda delle idee o delle immagini preferite da uno o dall'altro autore] non può presentare delle proprietà contraddittorie; altrimenti il programma di costruire una dottrina coerente, e dotata di solide basi, è destinato a rimanere una vana velleità. Pertanto siamo costretti ad abbandonare l'immagine di uno "spazio" dotato di certe proprietà, ed a concepire la geometria in modo del tutto diverso da quello classico.

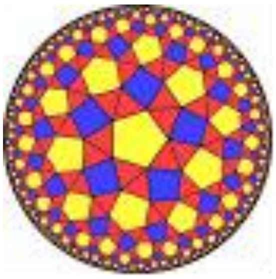
Dopo questo travaglio critico non era più possibile considerare la geometria come una scienza determinata e qualificata dal proprio oggetto. Divenne così utile distinguere almeno due significati del termine "geometria"; secondo la nomenclatura ormai diventata classica si dovette quindi distinguere tra una geometria i intesa come "sistema ipotetico deduttivo", ed una geometria intesa come "primo capitolo della fisica"; cioè intesa come il primo passo per una descrizione razionale e coerente dell'universo, diretta ad un coordinamento delle nostre esperienze sensibili, a partire da certe "intuizioni" o certe esperienze elementari.

Accanto a questa crisi radicale dei principi stessi della geometria occorre ricordare anche la nascita della geometria proiettiva e della geometria differenziale; in particolare questa ultima dottrina, per opera di Riemann, permise di fondare su nuove basi le procedure logiche per costruire i fondamenti stessi della dottrina geometrica. In particolare l'opera di Riemann fu il germe di una evoluzione che portò fino alla costruzione della dottrina che venne chiamata "calcolo differenziale assoluto" o anche "calcolo tensoriale".

È infine da ricordare che nel primo quarto di secolo si avverò la fioritura rigogliosa di una scuola di geometria algebrica, che sviluppava ed ampliava i risultati brillanti conseguiti dalla geometria italiana nell'ambito delle funzioni algebriche di una variabile complessa. La teoria delle superfici algebriche o, se si vuole, delle funzioni algebriche di due variabili complesse venne impostata inizialmente nella direzione, rivelatasi molto valida, in cui le proprietà degli enti considerati venivano interpretate convenzionalmente con immagini e con linguaggio mutuato dalla geometria. Questi problemi aprivano la strada a tutto un campo di ricerche riguardanti le varietà algebriche più generali. Tuttavia presto le questioni affrontate rivelarono una serie di difficoltà che resero presto evidente la necessità di utilizzare strumenti concettuali molto più potenti di quelli che pure si erano rivelati molto efficaci nei problemi relativi alle curve. Tali strumenti dovettero essere cercati nella topologia, nella teoria della funzioni trascendenti collegate con le funzioni algebriche e con i loro integrali.

5 - La meccanica razionale e la fisica matematica

Il terzo ramo della matematica classica che abbiamo enumerato è quello della meccanica razionale e fisica matematica; è noto che le questioni matematiche inerenti a queste due dottrine sono state, da secoli, una fonte quasi inesauribile di problemi matematici e di creazione di teorie nuove. In particolare i nuovi rami della matematica che stavano nascendo e crescendo rapidamente nell'epoca a cavallo tra i due secoli realizzarono contributi fondamentali tanto alla matematica per così dire teorica che a quella applicata. Molti sono i nomi di fisici matematici che apportarono importanti contributi alla scienza: ricordiamo in particolare quello di Henri Poincaré, e dell'italiano Vito Volterra [1860-1940]. Ma la teoria fisico matematica che suscitò maggiore interesse fu forse quella della Relatività, speciale e generale, costruita da Albert Einstein [1880- 1955]. Si volle vedere in essa una "geometrizzazione della fisica"; non intendiamo prendere posizione nei riguardi delle numerosissime discussioni filosofiche e cosmologiche che ancora sussistono in questo campo; vorremmo qui limitarci a rilevare l'influenza dei concetti matematici ed in particolare geometrici sul pensiero di Einstein.



Tassellazione del Disco di Poincaré

Qui ci interessa in particolare ricordare che la formulazione della teoria detta della "Relatività generale" è sostanzialmente stata resa possibile dalla esistenza degli sviluppi di geometria differenziale che Tullio Levi Civita [1873-1941] diede delle idee di Gregorio Ricci Curbastro [1853-1925]; e dagli sviluppi formali di quello che Levi Civita chiamò "Calcolo differenziale assoluto" e ricevette in seguito anche il nome di "Calcolo tensoriale".

Indipendentemente dal significato fisico e dalla importanza epistemologica della teoria einsteiniana, appare chiaro che questa, che venne chiamata una "geometrizzazione della fisica", affonda le sue radici nelle idee di Riemann e di Eugenio Beltrami [1835-99].

Inoltre si potrebbe dire che l'impiego metodico della nozione di invariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni costituisce la prova forse più importante della validità delle idee di Felix Klein [1849-1925] anche al di fuori del campo della geometria, in relazione alla quale egli le aveva presentate nella nota dissertazione inaugurale, che viene spesso richiamata con l'espressione "Programma di Erlangen".

È noto che, dopo la formulazione della teoria della relatività generale, che inquadra i fenomeni della gravitazione, Einstein perseguì per il resto della sua vita il programma di formulare una teoria unitaria, che comprendesse anche altri fenomeni fisici diversi da quelli della meccanica.

6 - Nuovi rami da un vecchio tronco

L'evoluzione della matematica nella prima metà del nostro secolo ha portato ovviamente ad ampliare gli ambiti di ricerca: abbiamo assistito alla nascita di nuovi rami, usciti dal vecchio tronco della scienza matematica; rami che, come la topologia e l'algebra [detta all'inizio "algebra moderna" oppure anche "algebra astratta", ed oggi denominata semplicemente "algebra"] hanno oggi assunto una importanza fondamentale nel panorama scientifico.

Per quanto riguarda la topologia si può pensare che anche le ricerche sul concetto di continuità e quelle sul concetto di dimensione si possono riconoscere oggi come attinenti alla topologia.
Tuttavia si suol dire che questo capitolo della matematica, oggi molto importante, ha avuto inizio da quella dottrina matematica relativamente recente che riconosce le proprie origini in scritti di Eulero rimasti classici; in origine la dottrina venne anche chiamata "Analysis situs", e venne descritta, in modo abbastanza pittoresco, come "Geometria qualitativa".

Questo nome suggestivo mirava a descrivere la dottrina come una geometria, cioè uno studio di certe proprietà degli oggetti estesi o - come qualcuno vuole - dell'ente chiamato "spazio"; precisamente di quelle proprietà che non dipendono dalle tradizionali misure di lunghezze e di angoli, ma soltanto dalla presenza di certi enti, considerati nella loro interezza. Per avere un'idea di proprietà di questo tipo si può immaginare una coppia di circuiti chiusi [per esempio due anelli]; indipendentemente dalla loro forma e grandezza, ovviamente tali due circuiti possono essere concatenati oppure no. E questo fatto continua a sussistere quale che sia l'insieme di deformazioni continue a cui i circuiti sono sottoposti, purché tali deformazioni non conducano a lacerazioni o discontinuità materiali. I collegamenti di questa dottrina con la teoria dei numeri complessi e delle funzioni algebriche ed i loro integrali furono utilizzati da Riemann per risolvere problemi importanti, riguardanti certe funzioni trascendenti collegate con le curve algebriche. La dottrina oggi viene chiamata "topologia" ed ha assunto una importanza fondamentale in tanti campi della matematica odierna, dividendosi inoltre in vari rami specialistici, e sviluppando anche varie importanti tecniche di ricerca e di dimostrazione.

7 - L'algebra

Come abbiamo detto poco sopra, il secondo ramo della matematica che ha visto uno sviluppo imponente nella prima metà del secolo è l'algebra. Si potrebbe forse cercare di descrivere questo fatto scientifico dicendo che l'algebra, nel senso classico, era considerata come la dottrina che si occupava delle operazioni sui numeri appartenenti a determinati insiemi: quelli che via via erano stati costruiti ampliando l'insieme dei numeri naturali: numeri razionali, numeri reali, numeri complessi.

La maturazione del pensiero matematico ha in certo modo staccato l'interesse dei matematici dai vecchi contenuti; e di conseguenza si potrebbe dire che l'attenzione degli studiosi si è concentrata sulle operazioni in se stesse. Ne è derivato un cambiamento radicale del modo di vedere le cose, e le strutture formali dell'algebra sono divenute presto gli strumenti fondamentali per lo studio degli oggetti degli altri rami della matematica. Così per esempio è nata una topologia algebrica, e la logica simbolica formale di cui diremo ha rinsaldato i propri legami con l'algebra, intesa in questo senso. Tra le conseguenze di questi grandi progressi dell'algebra si potrebbero ricordare i nuovi metodi, creati per la risoluzione di certi problemi della geometria algebrica che resistevano ai tentativi di soluzione con i metodi tradizionali.

Si potrebbe aggiungere che uno degli effetti più vistosi di questo prevalere dell'algebra nel pensiero matematico è stata una svolta radicale nella concezione della matematica e nell'analisi dei suoi fondamenti insieme con la nascita di movimenti che miravano alla sintesi globale del pensiero matematico.

Uno dei più importanti tra questi movimenti intellettuali e dei più influenti - anche a livello della trattatistica e della didattica - fu il movimento del gruppo francese che prese il nome di Nicolas Bourbaki. (È da ricordare che nel secolo XIX esistette effettivamente in Francia un personaggio storico dal nome di Charles Bourbaki [1816-1897]). Egli comandava un'armata dell'esercito di Napoleone III, ed all'epoca della sconfitta di Sédan si fece internare in Svizzera per evitare di consegnarsi ai tedeschi vincitori della guerra] .

Il gruppo bourbakista si arricchì in seguito di matematici, anche non francesi, soprattutto americani. Il gruppo si diede delle regole severe: tra l'altro quella di abbandonare il gruppo non appena superata una determinata età, considerata come limite superiore della possibilità di produzione di risultati scientifici degni di essere presi in considerazione. Il pensiero del bourbakismo potrebbe essere descritto in forma sommaria e rudimentale come una ricerca - da qualcuno giudicata esasperata - del rigore formale e conseguito con una algebrizzazione spinta della presentazione dei risultati.

Tra le conseguenze di un atteggiamento cosiffatto sono da ricordare il deprezzamento della geometria, considerata come "poco rigorosa" [ovviamente secondo i canoni del gruppo], e quindi addirittura la dichiarazione della "morte della geometria come ramo della matematica". L'influenza del gruppo Bourbaki nell'ambito della matematica superiore è stata molto grande, dato l'altissimo livello intellettuale dei partecipanti e il prestigio scientifico dei risultati conseguiti. Tale influenza si è estesa anche nella didattica di molti Paesi, compreso il nostro. È nata da questa influenza la introduzione nelle scuole [anche dell'ordine elementare] dello studio della teoria degli insiemi [la cosiddetta "insiemistica"] ed una impostazione della divulgazione che ha condotto alla produzione di molti corsi di quella che veniva chiamata "Matematica moderna".

Alcuni studiosi hanno rilevato anche l'influenza che il bourbakismo ha avuto su certe correnti di psicologia; in particolare sulla scuola di Jean Piaget [1896-1980]: nell'opera dello psicologo ginevrino si possono scoprire certe impostazioni della ricerca della formazione dei concetti matematici che in certo modo ricalcano l'analisi bourbakista dei fondamenti della matematica.

8 - I problemi dei fondamenti della matematica.

Abbiamo accennato al fatto che la matematica del secolo XIX ha visto la nascita delle questioni riguardanti i propri fondamenti.

Si potrebbe dire che questioni di questo tipo sono nate in occasione delle crisi provocate dalla invenzione delle cosiddette "geometrie non euclidee" e dei problemi sul loro significato e sulla loro coerenza. Ma la crisi della geometria non si è ristretta a questa dottrina, ma ha presto stimolato ed anche in certo modo provocato una revisione globale del pensiero matematico, ponendo per la prima volta delle domande prima trascurate, e ponendo anche in questione il significato e la portata degli strumenti logici di cui ci serviamo per concludere validamente le nostre argomentazioni e quindi anche mettendo in questione la validità delle nostre deduzioni.

In particolare la revisione critica della geometria fu accompagnata dalla revisione critica dell'aritmetica: il concetto di numero ed i suoi fondamenti furono oggetto delle riflessioni di vari matematici; tra questi occorre ricordare il nome di G. Peano il quale impostò il problema del chiarimento del concetto di numero naturale con cinque proposizioni, che ancora oggi sono abitualmente ricordate come "Assiomi di Peano". Il nome di Peano va ricordato anche per il fatto che egli fu l'iniziatore di una corrente di logica simbolica che si sviluppò in seguito in modo imponente.

Si potrebbe dire che, in questo ordine di idee, si rinuncia alla mediazione dei vari linguaggi naturali, utilizzati per la deduzione fino dalla nascita della logica, per opera del pensiero greco, e si introducono per così dire direttamente dei simboli per i concetti, per le loro relazioni e i loro concatenamenti; di modo che la procedura di deduzione si riduce ad un calcolo, cioè ad una procedura di trasformazione di simboli secondo certe regole formali di sintassi.

Si incontrano germi di queste idee anche in un'opera in cui Peano diede una applicazione alla geometria di quello che egli chiamò "Calcolo geometrico"; creando così un sistema di notazioni simboliche e di leggi di calcolo, che egli in seguito sviluppò ed applicò all'analisi dei fondamenti dell'aritmetica e del concetto di numero naturale.

Abitualmente viene indicato come iniziatore e precursore di questi studi l'inglese George Boole [1815-64]. Si potrebbe affermare che l'idea fondamentale del Boole sia stata quella di rilevare esplicitamente e di tentare una simbolizzazione della analogia formale tra certe operazioni della nostra mente e i calcoli dell'algebra abituale.

Su queste basi si instaurava quindi la possibilità di evitare il ricorso alle leggi tradizionali del sillogismo deduttivo nelle deduzioni e nei ragionamenti, per ridurre questi ad una applicazione di certe regole formali della sintassi dei simboli che si adottano. Il successo di questa idea portò alla costruzione di una dottrina che oggi viene chiamata appunto "Algebra di Boole".

Il Boole nelle sue opere utilizza spesso i simboli dell'algebra propriamente detta, ed alle operazioni logiche dà i nomi delle operazioni sui numeri. Ma fu presto chiaro che l'analogia tra i calcoli tradizionali sui numeri e quelli sugli oggetti considerati da Boole non era completa; e per evitare equivoci oggi si impiegano dei simboli specifici per le operazioni dell'Algebra di Boole, che ormai è diventata un ramo vasto e fiorente dell'Algebra matematica propriamente detta.

Si realizzava così la possibilità di evitare il ricorso al linguaggio comune nei ragionamenti; possibilità che era stata già preconizzata da Gottfried Wilhelm Leibniz [1646-1716], il quale aveva previsto un'epoca in cui i sapienti non dovessero più sobbarcarsi a lunghe dispute, ma potessero dirimere le questioni semplicemente sedendosi ad un tavolo e dire l'uno all'altro "calculemus". In altre parole era maturo per la soluzione il problema della deduzione simbolica e per così dire "automatica", deduzione della quale la matematica forniva un esempio paradigmatico con i suoi calcoli.

9 - I problemi dell'infinito

È opportuno ricordare, a questo punto, che uno dei problemi che ha dato origine a discussioni ed analisi, che stanno a cavallo tra la matematica e la filosofia, è stato il problema dell'infinito.

Anche a questo proposito si può osservare che già la matematica greca aveva sfiorato questo problema, per esempio con i celebri paradossi [del moto, di Achille ecc.]. Ed è facile osservare che il problema dell'infinito e del suo significato costituisce un motivo ricorrente di analisi e di riflessione. Per esempio è facile osservare che nella definizione di proporzione, sulla quale è fondata buona parte della geometria classica, intervengono in modo essenziale delle classi infinite di numeri razionali.

Anche nelle dimostrazioni classiche dell'analisi matematica intervengono in modo essenziale delle classi infinite. Così come queste classi intervengono nella costruzione dei concetto di numero reale, cioè nel concetto basilare, che fonda la simbolizzazione matematica del concetto di continuo geometrico.

È facile osservare che il problema dell'infinito si presenta già a livello di quello che potrebbe essere considerato come il capitolo iniziale della matematica, che ha come oggetto il numero naturale: infatti l'insieme di questi numeri costituisce il primo e più elementare esempio di insieme di infiniti elementi.

Il problema dell'infinito fu portato in primo piano dall'opera di Georg Cantor [1845-1918], con la teoria degli "insiemi" [Mengenlehere] da lui fondata e sviluppata. Le sue idee lo portarono ad una fondamentale e storica costruzione di concetti, che ancora oggi rimangono basilari per la matematica superiore: tra l'altro egli estese il concetto di numero agli insiemi infiniti, creando il concetto di "numero transfinito", con il quale si riesce a stabilire in qualche modo una "gerarchia degli infiniti"; concetto impensabile prima di lui, ed oggi appartenente al pensiero matematico corrente.

Per dare un esempio elementare si può osservare che, prima di Cantor, appariva ovvio che l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei punti di un segmento [a maggior ragione di una retta] sono entrambi infiniti. Ma con i concetti costruiti da Cantor si riesce a stabilire un confronto tra questi due "infiniti": rimane infatti classico il risultato di Cantor secondo il quale l'insieme dei numeri naturali [che egli chiamò "numerabile"] non può essere posto in corrispondenza biunivoca con quello dei punti di un segmento. Nacque da qui anche tutta una problematica riguardante il posto che l'insieme dei punti che la geometria considera abitualmente [il "continuo"] avesse nella gerarchia dei transfiniti, costruita da Cantor.

Sostanzialmente il nucleo della dimostrazione si basa sul teorema [pure di Cantor] il quale prende in considerazione un insieme qualunque non vuoto, e l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi del primo; e dimostra che i due insiemi non possono essere posti in corrispondenza biunivoca tra loro, e che anzi il secondo è in ogni caso, per così dire, più "numeroso" del primo.

Un particolare ciclo di ricerche in questo campo fu originato da una critica che Peano fece a certe procedure di dimostrazione tradizionali, nelle quali si faceva ricorso ad un numero imprecisato [e quindi anche infinito] di scelte di un elemento qualunque in un dato insieme. Il matematico tedesco Ernst Zermelo [1871-1953] enunciò questa possibilità come assioma della teoria degli insiemi [assioma "della scelta"]; ciò diede origine ad una serie di ricerche dirette ad indagare se tale assioma fosse oppure no indipendente dagli altri assiomi con i quali si costruiva una teoria degli insiemi. La teoria degli insiemi, creata da Cantor, sta in certo senso a cavallo tra la matematica e la logica, e si può considerare come titolare di una problematica che coinvolge l'analisi delle operazioni elementari della nostra mente; appare quindi ovvio il coinvolgimento della matematica in tali questioni, perché molte delle teorie matematiche, quando non si accontentano dei dati e delle suggestioni delle immagini mentali, ma vogliono giustamente garantire il proprio rigore e la propria fondatezza, sono spesso portate ad indagarle.

10 - La logica

Abbiamo già avuto occasione di ricordare che l'incontro con Peano in occasione del congresso mondiale dei matematici che si tenne a Parigi determinò la decisione di Russell di dirigere i propri interessi verso l'analisi e lo studio dei fondamenti della matematica. Opera che egli svolse con la collaborazione del matematico Alfred North Whitehead [1861-1947]; collaborazione che portò alla stesura della celebre opera intitolata "Principia Mathematica", nella quale i fondamenti del pensiero matematico sono indagati e presentati in modo unitario, con l'utilizzo del formalismo logico inventato da Peano.

Il grande interesse per gli studi riguardanti i fondamenti della matematica a di conseguenza la connessa problematica riguardante la logica, il suo significato, il suo valore ed i suoi fondamenti portarono molti ricercatori e dedicarsi a questi studi. Ricorderemo tra i tanti degni di nota, i nomi di Friedrich Ludwig Gottlob Frege [1848-1925] e di D. Hilbert.

Il nome di Frege è legato a varie opere che egli dedicò ai fondamenti dell'aritmetica ed al concetto di numero naturale; egli inventò pure una notazione simbolica, che utilizzò nelle sue opere per esporre il proprio pensiero. Purtroppo le notazioni che Frege adottava, pur essendo molto intelligenti, erano tuttavia complesse e soprattutto di difficile riproduzione mediante gli strumenti tipografici dell'epoca. Forse anche questa circostanza, oltre alle polemiche che ebbe con Peano e con Russell, influì sulla depressione che colse Frege verso la fine della sua vita.

Proprio in polemica con Frege, B. Russell formulò la celebre antinomia che porta il suo nome, *[come definire la classe di tutte le classi che non si appartengono, n.d.r.]* con la quale lo stesso Russell svuotò, almeno in parte, il lavoro di Frege nell'ambito della logica.

Occorre ricordare che l'esistenza di antinomie logiche era nota anche al pensiero greco: celebre è l'antinomia detta "del cretese" [il quale afferma che tutti i cretesi mentono sempre], che era un luogo comune degli studi classici della logica, e che fu riformulata in seguito in numerose versioni. Si potrebbe dire che l'antinomia di Russell diede occasione a questo Autore di enunciare le leggi sintattiche che reggono la sua logica.

Il nome di Hilbert ricorre anche nel campo della logica, perché egli lasciò i segni della sua intelligenza anche nella problematica riguardante i fondamenti. Classica è rimasta la sua opera sui fondamenti della geometria; ma egli si occupò anche dei problemi logici che riguardano i fondamenti. Hilbert fu particolarmente interessato anche dalla problematica riguardante i fondamenti della dimostrazione matematica. Infatti se si prosegue sul cammino dell'astrazione e della formalizzazione, rimane sempre aperto il problema del garantire la coerenza interiore dei sistemi di proposizioni che si pongono alla base di una teoria qualsivoglia.

Occorre ricordare che la questione era nata da tempo, con l'invenzione delle geometrie non euclidee. Il problema era stato risolto con la costruzione di "modelli", cioè assegnando dei "contenuti" alle proposizioni che si enunciano. O, in altre parole, considerando i simboli che si utilizzano come "segni" di una realtà esterna che, per così dire, si assume l'onere di garantire la coerenza delle proposizioni che la riguardano, e che enunciano certe sue proprietà immediatamente percepite. Restava aperto il problema di trovare una dimostrazione rigorosa della possibilità di garantire il sistema di proposizioni che fondano il primo capitolo della matematica, individuato nella teoria del numero naturale, oggetto di quella che viene abitualmente chiamata l'aritmetica elementare.

Abbiamo già osservato che in quest'ambito non è possibile evitare il ricorso o la considerazione dell'infinito, o meglio dell'insieme con infiniti elementi, perché tale è l'insieme dei numeri naturali. In questo ordine di idee ricordiamo che Peano, nella sua assiomatizzazione del concetto di numero naturale, di cui abbiamo detto, aveva enunciato un opportuno assioma, che spesso viene richiamato come "assioma di induzione". Ma resta il problema di garantire la coerenza di un sistema di assiomi che si sceglie e che si enuncia per iniziare l'esposizione di una teoria, per esempio l'aritmetica elementare.

Secondo il progetto di ricerca logica enunciato da Hilbert, il dominio completo di un sistema formale non avrebbe dovuto uscire dal sistema formale stesso. Una pagina importante in queste ricerche fu scritta da Kurt Gödel [1907-78], il quale dimostrò (1931) che la non contraddittorietà di un sistema formale, che sia abbastanza potente da poter trattare l'aritmetica elementare, non è dimostrabile all'interno del sistema stesso.

Un'altra importante crisi del pensiero matematico del secolo XX avvenne per opera di Luitzen Egbertus Brouwer [1881-1966]. Con il sistema di pensiero da lui iniziato vennero messi in dubbio i procedimenti che erano da sempre stati considerati validi per l'analisi matematica: esempio tipico gli schemi logici tradizionali come quello detto "del terzo escluso" e quello della doppia negazione considerata equivalente alla affermazione.

11 - Il calcolo delle probabilità e la teoria dell'informazione

È noto che si suol far risalire l'origine del calcolo delle probabilità al secolo XVII, e ricordare in particolare i contributi di Blaise Pascal [1623-62], Pierre Fermat [1601-65], Christiaan Huygens [1629-95]. Anche questo ramo della matematica ha vissuto nel nostro secolo una crisi riguardante i suoi fondamenti e il suo significato nei riguardi di una realtà scientifica e sociale. In questo ordine di idee appare particolarmente significativa l'opera di Bruno De Finetti [1906-85], il quale impostò su nuove basi il concetto di probabilità, aprendo la strada a significativi progressi in quest'ambito.

Il concetto di probabilità ed i corrispondenti sviluppo teorici hanno mostrato tutta la loro importanza e validità nei collegamenti con la teoria dell'informazione. Infatti questo termine, impiegato abitualmente con significati spesso vaghi e diversi tra loro, ha ricevuto una definizione matematicamente trattabile ed utilizzabile da parte di Claude Shannon, che l'ha collegato in forma precisa al concetto di probabilità, in particolare definendo il concetto di entropia negativa, in stretto collegamento con il concetto di entropia utilizzato dalla fisica secondo la classica formulazione che ne diede Ludwig Boltzmann [1844-1906].

La teoria dell'informazione ha avuto uno sviluppo grandissimo nella seconda metà del secolo; sviluppo favorito dalla diffusione dei mezzi di elaborazione dell'informazione e di calcolo numerico. Infatti le necessità militari della seconda guerra mondiale hanno stimolato e favorito la costruzione di quelle che vengono chiamate calcolatrici elettroniche. Si potrebbe dire che i progressi della fisica e soprattutto dell'elettronica hanno reso possibile la costruzione ed il funzionamento di queste macchine, il cui progresso è stato rapidissimo.

L'impiego degli strumenti elettronici ha permesso di costruire dei sistemi materiali che portassero finalmente alla realtà le geniali idee del precursore Charles Babbage [1792-1871], il quale aveva inventato [ed anche costruito, senza tuttavia poterla rendere funzionante] una macchina che realizzava il calcolo numerico mediante algoritmi, cioè di procedure a più stadi in cui i calcoli che si effettuano in uno stadio dipendono dai risultati degli stadi precedenti. È chiaro che una macchina di questo genere è molto difficile da costruire e soprattutto da far funzionare se le sue parti sono oggetti materiali che si muovono. Ma i materiali di cui oggi disponiamo permettono di realizzare quelle idee, in modo sempre più efficace, con gli strumenti dell'elettronica.

La possibilità di eseguire e di ottenere risultati da calcoli, che in passato avrebbero richiesto proibitive disponibilità di tempo e di energie intellettuali, ha cambiato quasi radicalmente il panorama delle ricerche matematiche in certi ambiti e permesso l'applicazione di teorie che avevano in passato una vita quasi esclusivamente teorica: un esempio è fornito dalla programmazione lineare e non lineare, che permette oggi di risolvere problemi tecnologici di grandissima importanza per la teoria e per le applicazioni. Inoltre gli studi di informatica e di logica hanno permesso la costruzione di strumenti elettronici per il calcolo formale e non più soltanto numerico.

Difficile sarebbe dare una valutazione esaustiva dello stato presente di evoluzione del pensiero matematico: in modo generico si potrebbe dire che uno degli aspetti caratteristici appare essere il fatto che oggi le applicazioni della matematica si dirigono ad un campo molto più vasto di quello tradizionale della fisica e della tecnica ingegneristica: un esempio, tra i tanti che si potrebbero citare, è fornito dalla teoria, diventata rapidamente classica, dei giochi di strategia, creata da John von Neumann e Oskar Morgenstern; teoria con cui il comportamento umano della competizione economica ed in generale strategica viene analizzato e trattato teoricamente con gli strumenti della matematica.

La validità e la potenza degli strumenti teorici, logici ed informatici di cui i matematici possono oggi disporre è ulteriormente confermata, se ve ne fosse bisogno, dal fatto che si debbono alla matematica dei nostri tempi le soluzioni di problemi classici, che resistevano da molto tempo ad ogni tentativo di soluzione; alcuni da secoli, come il cosiddetto "grande teorema di Fermat", dimostrato definitivamente da Andrew Wiles nel 1995.

La matematica quindi si conferma come una grande avventura dello spirito, ed un monumento secolare della scienza, costruito dalla intelligenza e dalla fatica mentale degli amanti della verità e della certezza.

NOTA. Questo lavoro è comparso come uno dei contributi del libro: *Novecento Novecenti. La cultura di un secolo.* (Collana Secondaria Superiore. Saggi).
A cura di Evandro Agazzi. Brescia, La Scuola Editrice, 1999. PP. 197-213.

Reimpaginato da file, Novembre 2013

BIBLIOGRAFIA

U. Bottazzini. *Il flauto di Hilbert*. Torino, UTET, 1990. PP. 455.

P. J. Cohen. *Set theory and continuum hypothesis*. New York, W. A. Benjamin, 1966 [Traduzione italiana: *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo*. Milano, Feltrinelli, 1973].

J. Dieudonné. L'axiomatique dans les mathématiques modernes. In Congrès international de philosophie des sciences. Paris 1949. Paris, Hermann, 1951.

J. Dieudonné. *The work of Nicolas Bourbaki*. In American Mathematical Monthly. Vol. 79, 1972.

B. De Finetti. *Teoria della probabilità*. Torino, Einaudi, 1970.

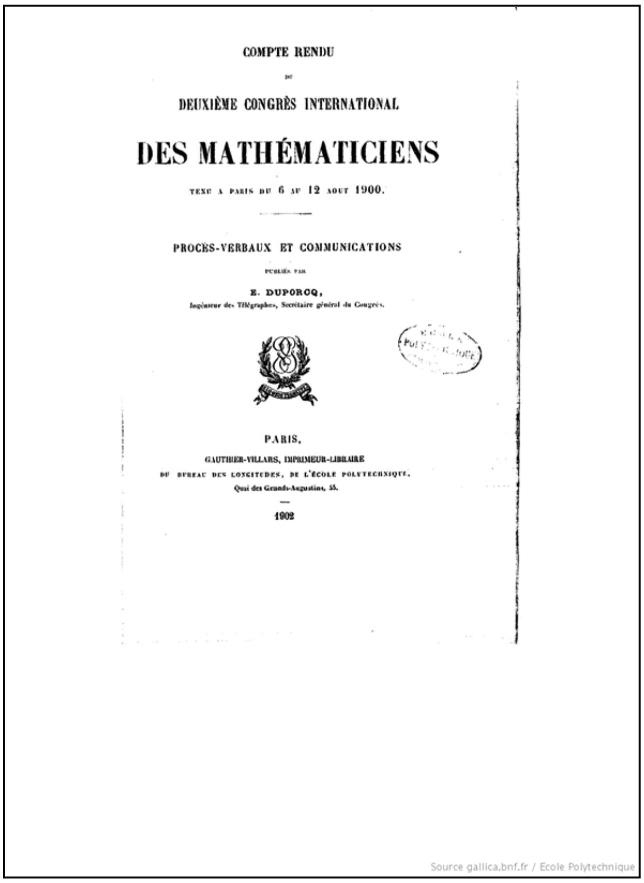
K. Gödel. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*. In Monatshefte für Mathematik und Physik. Vol. 38, 1931, PP. 173-198.

D. Hilbert. *Sur les problèmes futurs des mathématiques*. In Compte rendu du Deuxième Congrès international des Mathématiciens. Paris 1900. Paris Gauthier-Villars, 1901. [Reprint in **G**esammelt Abhandlungen, vol. III. Berlin, Springer, 1935].

D. Nagel e J. R. Newmann. *La prova di Gödel*. Traduzione italiana a cura di E. Ballo. Torino, Boringhieri, 1974.

G. Ricci Curbastro e T. Levi Civita. *Méthodes de calcul differentiel absolu et leurs applications*. In Mathematische Annalen, Vol. 54, 1901, pagg. 125-201.

B. L. Van der Wärden. Moderne Algebra. Berlin, Springer, 1930 - 31.



COMPTE RENDU

DU

DEUXIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL

DES MATHÉMATICIENS

TENU A PARIS DU 6 AU 12 AOUT 1900.

PROCÈS-VERBAUX ET COMMUNICATIONS

PUBLIÉS PAR

E. DUPORCQ,

Ingénieur des Télégraphes, Secrétaire général du Congrès.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1902